УДК 51-72

ИНЕРЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Левина Е. А., Мезенцев А. В.

Уральский государственный университет путей сообщения,
Екатеринбург, Россия
levina_345@mail.ru, amezentsev@usurt.ru

Аннотация. В работе моделируется движение по инерции равномерно испаряющейся капли жидкости под действием силы сопротивления, пропорциональной скорости движения капли и ее радиусу. Для постановки задачи приводится обоснование использования дифференциального уравнения, описывающего закон сохранения импульса для материальной точки переменной массы. Проводятся расчеты с использованием пакета Mathcad по полученным в результате решения дифференциального уравнения формулам, и исследуется поведение функции в окрестности точки разрыва.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, движение тела переменной массы, уравнение Леви-Чивита.

INERTIAL MOTION OF AN EVENLY EVAPORATING DROP OF LIQUID IN AN ENVIRONMENT WITH RESISTANCE

Levina E.A., Mezentsev A.V.

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia

Abstract. The paper simulates the inertia motion of a uniformly evaporating liquid drop under the action of a drag force proportional to the speed of the drop and its radius. To formulate the problem, the use of a differential equation describing the law of conservation of momentum for a material point of variable mass is justified. Calculations are performed using the Mathcad package based on the formulas obtained as a result of solving the differential equation, and the behavior of the function in the vicinity of the break point is investigated.

Key words: the differential equation, motion of a body with variable mass, the equation of Levi-Civita.

Введение.

Задачи математического моделирования движения тел переменной массы подробно рассмотрены в курсе теоретической механики [1]. Изучение методов постановки таких задач и способов их решений может быть полезно студентам технических университетов в качестве примера решения задач на составление дифференциальных уравнений. Так в сборнике задач по курсу математического анализа для студентов технических вузов [2] приводится несколько задач повышенного уровня сложности о моделировании движения испаряющейся капли жидкости в среде с сопротивлением.

Краткие теоретические сведения

Движение тела переменной массы под действием внешних сил описывается уравнением Мещерского [1]

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt}=(\mathbf{u}-\mathbf{v})\frac{dM}{dt}+\mathbf{F}, \tag{1}$$

где $M = M(t)$ — масса материальной точки переменной массы, изменяющейся за счет обмена частицами с окружающей средой, $\mathbf{v}$ — скорость движения материальной точки переменной массы, $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ — относительная скорость отделяющихся частиц, $\mathbf{u}$ — абсолютная скорость отделяющихся частиц, $\mathbf{F}$ — результирующая внешних сил, действующих на материальную точку переменной массы.

Если в уравнении (1) перенести слагаемое $-\mathbf{v}dM/dt$ в левую часть, то уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v})=\mathbf{u}\frac{dM}{dt}+\mathbf{F}. \tag{2}$$

Предполагая, что абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, получим частный случай уравнения Мещерского [1]

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v})=\mathbf{F}. \tag{3}$$

Если абсолютная скорость отбрасываемых (излучаемых) частиц равна нулю, то производная по времени от количества движения точки переменной массы равна равнодействующей всех приложенных к ней сил [1].

В иностранной литературе уравнение (3) называется уравнением Леви-Чивита [1].

Постановка задачи и решение

Рассмотрим движение равномерно испаряющейся капли жидкости в среде с сопротивлением [2].

Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г., равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, движется по инерции с начальной скоростью v_0 см/ с. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент времени (t = 0) сила сопротивления равна f_0 Н. Найдем зависимость скорости капли от времени.

Пусть $M = M(t)$ — переменная масса капли, $v = v(t)$ — ее скорость. Учитывая равномерную скорость испарения m, имеем $M(t) = M_0 - mt$, $M'(t) = -m$. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости и радиусу капли $F_{сопр} = kvR$, где k — коэффициент пропорциональности, $R = R(t)$ — радиус капли. В начальный момент времени сила сопротивления равна $f_0 = F_{сопр}(0) = kV_0 R_0$, где v_0 — начальная скорость капли, R_0 — ее начальный радиус. Отсюда выразим коэффициент сопротивления

$$k = \frac{f_0}{v_0 R_0}.$$

Определим размерность коэффициента сопротивления с учетом размерностей начальных данных

$$[k] = \frac{Н}{(см/с)\cdot см} = \frac{кг\cdot м/с^2}{(см/с)\cdot см} = \frac{г\cdot см}{см^2\cdot с}\cdot 10^5 = \frac{г}{см\cdot с}\cdot 10^5.$$

Запишем закон движения материальной точки переменной массы (3)

$$M'v + Mv' = F_{сопр}.$$

С учетом введенных обозначений получим линейное дифференциальное уравнение

$$-mv + (M_0 - mt)v' = -kvR.$$

Преобразуем полученное уравнение

$$(M_0 - mt)v' = (m - kR)v. \qquad (4)$$

Найдем выражение для $R = R(t)$ — радиуса капли через известные функции. Для этого используем формулу, связывающую массу и объем $M = \rho V$, ρ – плотность. Определим размерность и значение плотности

$$[\rho] = \frac{кг}{м^3} = \frac{10^3}{10^6}\left(\frac{г}{см^3}\right) = 10^{-3}\frac{г}{см^3}, \quad \rho = 1\frac{г}{см^3}.$$

Таким образом, для данных размерностей $M = 1\cdot V$.

Выразим радиус капли из формулы объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$R^3 = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi}V.$$

Радиус капли уменьшается со временем по формуле

$$R(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V(t)} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}M(t)} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[3]{M_0 - mt}, \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[3]{M_0}.$$

Получим выражение для функции $kR(t)$

$$kR(t)=\frac{f_0}{v_0R_0}10^5R(t)=\frac{f_0}{v_0\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[3]{M_0}}10^5\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[3]{M(t)}=\frac{f_0 10^5}{v_0}\sqrt[3]{\frac{M_0-mt}{M_0}}=\frac{f_0 10^5}{v_0}\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}.$$

Подставим kR в уравнение (4) и проинтегрируем полученное уравнение

$$\left(M_0-mt\right)\frac{dv}{dt}=\left(m-\frac{f_0 10^5}{v_0}\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right)v.$$

Получим

$$\ln|v|=\frac{3f_0\cdot 10^5}{v_0\,m}\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{1}{3}}-\ln|M_0-mt|+C. \qquad (5)$$

Для определения константы интегрирования подставим $t=0$

$$C=\ln|v_0|+\ln|M_0|-\frac{3f_0\cdot 10^5}{v_0\,m}.$$

Подставим найденное для константы C выражение в уравнение (5)

$$\ln|v|=-\frac{3f_0\cdot 10^5}{v_0\,m}\left[1-\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{1}{3}}\right]+\ln\left|\frac{v_0 M_0}{M_0-mt}\right|,$$

Скорость равномерно испаряющейся капли выражается формулой

$$v=\frac{v_0 M_0}{M_0-mt}\,e^{-\frac{3f_0\cdot 10^5}{v_0 m}\left[1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right]}. \qquad (6)$$

Анализ полученной формулы и обсуждения

Отметим, что полученная формула (6) имеет особенность в точке $t=M_0$/m. Проведем расчеты по полученной формуле с использованием пакета Mathcad. В качестве начальных данных возьмем: начальную массу $M_0=1$(г), начальную скорость $v_0=10$(см/с), скорость испарения $m=0,01$ (г/с), начальную силу сопротивления $f_0=0.0001$ (Н).

Таблица 1 – значения скорости, силы сопротивления, массы и радиуса в моменты времени t = 10, 20, 30 с.

t	$v(t)$	$f(t)$	$M(t)$	$R(t)$
t = 10	0.000354	$3.42\cdot10^{-9}$	0.9	0.599
t = 20	$5.72\cdot10^{-9}$	$5.31\cdot10^{-14}$	0.8	0.576
t = 30	$3.55\cdot10^{-14}$	$3.15\cdot10^{-19}$	0.7	0.551

В результате расчетов получено, что скорость испаряющейся капли быстро убывает при одновременном уменьшении силы сопротивления. Из таблицы видно, что через 20 секунд после начала движения скорость капли станет близка к нулю. Капля останавливается, сила сопротивления перестает действовать, при этом масса капли и ее радиус уменьшаются незначительно.

Поведение функции вблизи точки разрыва $t = M_0 / m = 100$ рассмотрим более подробно. Также отметим одну особенность вычислений с помощью программы Mathcad [3]. Приведем график функции $v(t)$ на отрезке [0, 110].

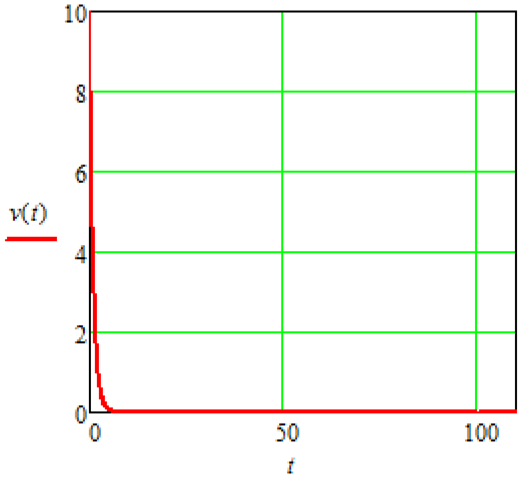

Рисунок 1 – График скорости на отрезке [0,110]

На графике (рис. 1) точка разрыва $t = M_0 / m = 100$ не видна, хотя из анализа формулы (6) следует, что в этой точке функция терпит разрыв 2-го рода [4]. Объясним это.

При проведении расчетов в Mathcad по формуле (6) при значении t = 100 (рис 2.) значение числителя в формуле (6) равно $v_0 M_0 = 10$, знаменатель $M_0 - mt$ равен нулю, значение экспоненты равно

$$e^{-\frac{3 f_0 \cdot 10^5}{v_0 m}\left[1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right]} = e^{-300}.$$

Вычисление функции в точке t = 100 приводит к сообщению об ошибке деления на ноль. Однако вычисление в точках близких к 100 дает нулевые значения функции.

Таблица 2 – значения скорости в окрестности точки разрыва

t	$v(t)$
t = 99.99999999999999	0
t = 100	деление на ноль
t = 100.00000000000001	0

Особенность такого поведения функции объясняется малым значением e^{-300}. Для того, чтобы увидеть разрыв функции $v(t)$ построим график функции $v(t)$ с повышающим коэффициентом e^{300} (рис. 2).

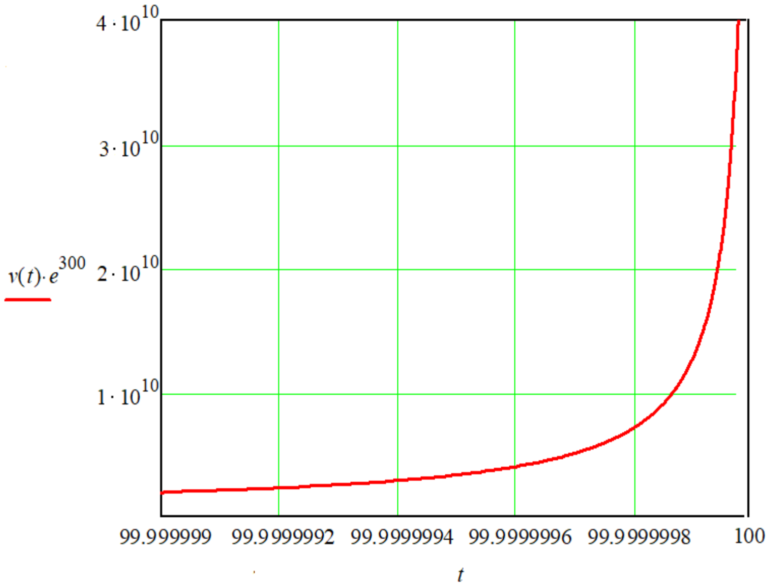

Рисунок 2 – График функции $v(t)\ e^{300}$

В заключении рассмотрим, насколько физически обосновано построенное решение. В рассмотренной математической модели задачи предполагается, что абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю. Такое предположение относительно отделяемых частиц означает, что все частицы летят в одну сторону, противоположную движению тела и со скоростью по величине равной мгновенной скорости тела. Это специфическое реактивное движение, привести физический пример которого затруднительно.

Библиографический список

1. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Просвещение, 1966.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие. СПб.: Лань, 2019.

3. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие. СПб.: Лань, 2009.

4. Мышкис А.Д. Математика для технических ВУЗов. Специальные курсы: учебное пособие. СПб.: Лань, 2009.